

Modélisation des phénomènes électromagnétiques dans les matériaux supraconducteurs*

M. Maslouh^a et F. BouillaultLGEP – ESE^b, Universités Paris VI et XI, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Reçu : 20 mars 1997 / Révisé : 3 décembre 1997 / Accepté : 5 décembre 1997

Abstract. This paper describes a numerical method to determine the losses in a solid superconductor plunged in transverse magnetic field or in transport current. The model which is based on the Bean critical state, shows that the hysteretic phenomena are taken in account.

Résumé. Cet article présente une méthode de calcul permettant la détermination des pertes dans un matériau massif supraconducteur soumis à un champ magnétique transversal ou parcouru par un courant de transport. Le modèle, basé sur celui de l'état critique de Bean, met en évidence le caractère hystérique des phénomènes.

PACS. 85.25.Kx Superconducting wires, fibers, and tapes – 85.25.Am Superconducting device characterization, design, and modeling

1 Introduction

Alimentés en courant continu, les matériaux supraconducteurs ne présentent pas d'effet Joule d'où leur grand intérêt pour le transfert ou pour la conversion d'énergie en électrotechnique. Par contre, alimentés en courant alternatif, il en est autrement [1]. Il convient alors d'évaluer ces pertes si l'on veut s'assurer du maintien de la température de fonctionnement en dessous de la température critique T_c et de l'intérêt économique de leur utilisation. La caractérisation expérimentale des pertes conduit d'une part à une approche empirique et d'autre part ne permet pas toujours la compréhension des phénomènes physiques et du comportement électromagnétique de ces matériaux. Plus la complexité des nouveaux matériaux augmente et plus l'estimation des pertes est difficile, il devient alors nécessaire de recourir à la simulation et à la modélisation des pertes par des méthodes numériques.

2 Modélisation mathématique des supraconducteurs

2.1 Présentation du problème

Le comportement électromagnétique des matériaux supraconducteurs peut être décrit par les équations de Maxwell

liant les champs de vecteurs \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{b} et \mathbf{j} . Ces dernières s'écrivent :

$$\partial_t \mathbf{b} + \text{rot } \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{h} - \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (2)$$

à ces équations s'ajoute la loi de comportement entre \mathbf{b} et \mathbf{h} :

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \quad (3)$$

où μ désigne la perméabilité magnétique du matériau qui sera prise ici égale à celle du vide μ_0 .

Pour former un système complet, à ces équations, on doit rajouter la loi de comportement reliant \mathbf{j} et \mathbf{e} . Souvent, l'analyse des supraconducteurs de deuxième espèce se base sur le modèle de Bean [2,3] pour lequel la relation $\mathbf{j}-\mathbf{e}$ n'est ni linéaire ni un graphe fonctionnel, cf. figure 1a. Il est possible de généraliser le modèle de l'état critique à un modèle qui tient compte d'une part de la transition à l'état normal pour des champs électriques, d'amplitude supérieure à e_n (Fig. 1b) et d'autre part de la dépendance de la densité de courant critique j_c en fonction de l'induction magnétique \mathbf{b} locale [4].

Traditionnellement, le calcul des champs dans les matériaux supraconducteurs est obtenu par un code utilisant un processus itératif. À chaque itération, la conductivité est ajustée afin d'obtenir une densité locale de courant égale à j_c [6]. Ce modèle conduit généralement à des temps de calcul importants et la convergence n'est pas garantie. Pour notre part nous avons utilisé une autre approche. Nous avons régularisé la caractéristique $j(e)$ pour

* Le contenu de cet article a été présenté à NUMELEC 97

^a e-mail: maslouh@hp715-21gep.supelec.fr

^b U.R.A. CNRS

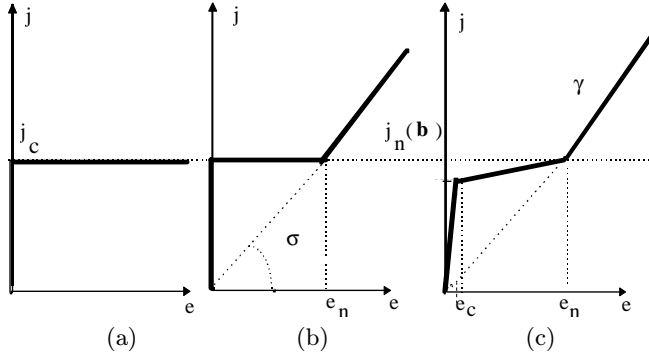


Fig. 1. (a) Modèle de Bean, (b) modèle de Bean généralisé [5], (c) modèle proposé.

[Different $j - e$ models.]

la rendre univoque (Fig. 1c). Les paramètres e_n et j_n délimitent la région pour laquelle le matériau demeure supraconducteur. Les paramètres e_c et j_c quant à eux sont choisis pour que la loi de comportement $j(e)$ s'approche au mieux de la caractéristique expérimentale. Remarquons que la caractéristique ainsi modélisée fait apparaître deux régions de fonctionnement ($j < j_c$ et $j_c < j < j_n$) qui peuvent être assimilées aux régions de “flux creep” et “flux flow” [7].

Il existe des géométries où la résolution du système (1) (2) (3) conduit à l'étude d'une équation aux dérivées partielles scalaire. Par exemple, l'étude d'un long supraconducteur de section rectangulaire, plongé dans un champ magnétique transversal, se ramène à un problème bidimensionnel. Les courants \mathbf{j} et le champ électrique \mathbf{e} ont une seule composante normale au plan d'étude, l'équation scalaire s'écrit :

$$\partial_t j - \text{div} \left((1/\mu_0) \text{grad } e \right) = 0 \quad (4)$$

où $j = \gamma(e)$ est une fonction monotone non linéaire (Fig. 1c). Cette équation ne peut être résolue sans les conditions aux limites résultant directement des équations de Maxwell et qui sont généralement de type de Dirichlet ou Neuman. Plus précisément, dans le cas de Neuman non homogène, on pose :

$$\partial_n e = \mu_0 \partial_t H_{\text{tan}}, \quad (5)$$

où H_{tan} désigne la composante tangentielle du champ appliqué. Cette dernière condition est imposée à une distance suffisante du supraconducteur afin de tenir compte du champ de réaction.

2.2 Traitement numérique et condensation

La résolution de l'équation (4) nécessite d'utiliser une méthode numérique. Nous utilisons ici la méthode des différences finies [8] qui est la méthode de référence pour des configurations rectangulaires. On construit une grille ou un maillage constitué par un double réseau de droites. L'extension à des géométries compliquées pourrait se faire *a priori* sans difficultés majeures en utilisant, par exemple,

la méthode des éléments finis et moyennant quelques légères modifications. On remplace le système d'équations aux dérivées partielles par un système écrit en termes de différences finies, c'est-à-dire, en intégrant par parties l'équation (4) sur chaque cellule élémentaire du maillage. On obtient alors le système algébrique non linéaire suivant :

$$[\mathbf{D}] \partial_t \gamma(\mathbf{E}, \mathbf{B}) + [\mathbf{A}] \mathbf{E} = \mathbf{F} \quad (6)$$

où \mathbf{E} , \mathbf{B} et $\gamma(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ sont les vecteurs de degrés de libertés respectivement du champ électrique e , de l'induction magnétique \mathbf{b} et de la densité de courant j du fait que $j = \gamma(e, \mathbf{b})$, $[\mathbf{D}]$ désigne la matrice diagonale dont les termes représentent les aires des cellules du réseau, $[\mathbf{A}]$ est la matrice analogue de l'opérateur $-\text{div grad}$ en discrétisation par différences finies et le second membre \mathbf{F} qui dépend du temps tient compte des conditions aux limites sur le bord (5). Dans l'équation (6), il y a une dérivation par rapport au temps, on introduit un pas de temps Δt , et la suite des vecteurs $\mathbf{E}^m = \mathbf{E}(m\Delta t)$. L'utilisation du schéma de Crank-Nicolson conduit à :

$$[\mathbf{D}] \frac{\gamma(\mathbf{E}^{m+1}, \mathbf{B}^{m+1}) - \gamma(\mathbf{E}^m, \mathbf{B}^m)}{\Delta t} + [\mathbf{A}] \frac{(\mathbf{E}^{m+1} + \mathbf{E}^m)}{2} = \mathbf{F} \left(\left(m + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right). \quad (7)$$

Les valeurs de \mathbf{E}^{m+1} et \mathbf{B}^{m+1} sont obtenues par la résolution du système non linéaire de type :

$$\partial_t \gamma(\mathbf{E}, \mathbf{B}) + [\mathbf{C}] \mathbf{E} = \mathbf{G}. \quad (8)$$

Pour résoudre ce système nous utilisons un processus itératif. Afin de réduire les temps de calcul, nous avons mis en place une méthode de condensation. On renumérote les inconnues de telle manière que le système matriciel (8) se décompose en 2 sous systèmes. L'un faisant apparaître des inconnues relatives au supraconducteur, l'autre à l'air environnant.

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{11}] & [\mathbf{C}_{12}] \\ {}^t[\mathbf{C}_{12}] & [\mathbf{C}_{22}] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \text{ et } \mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2),$$

et en éliminant \mathbf{E}_2 dans la relation (8), car dans l'air la densité de courant est identiquement nulle, on aboutit à :

$$\gamma(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}) + [\mathbf{A}] \mathbf{E}_1 = \mathbf{F}, \quad (9)$$

où $[\mathbf{A}] = ([\mathbf{C}_{11}] - [\mathbf{C}_{12}][\mathbf{C}_{22}]^{-1} {}^t[\mathbf{C}_{12}])$ et $\mathbf{F} = \mathbf{G}_1 - [{}^t[\mathbf{C}_{12}][\mathbf{C}_{22}]^{-1} \mathbf{G}_2$.

À l'équation (9) s'ajoute le système provenant de l'équation de Faraday qui permet l'obtention du champ magnétique :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^m - \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{E}), \quad (10)$$

où \mathbf{R} est la matrice analogue de l'opérateur rotationnel en discrétisation. Le système (9) (10) est traité comme étant un problème de point fixe en \mathbf{B} . À chaque \mathbf{B} fixe,

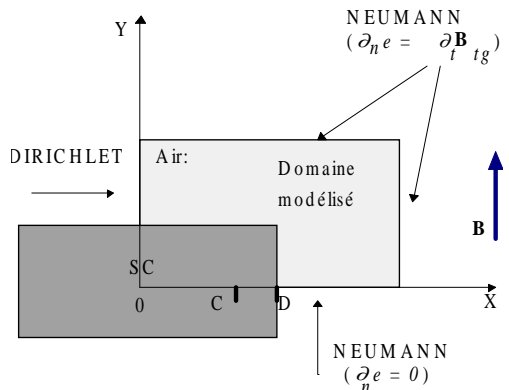


Fig. 2. Position des conditions aux limites quand le champ appliqué est suivant Oy .
[Structured domain with boundary conditions.]

on est amené à résoudre le système (9) qui est équivalent à chercher \mathbf{E}_1 tel que :

$$\mathbf{E}_1 = \text{Arginf} \{ \mathbf{U}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) + (1/2)([\mathbf{A}]\mathbf{X}, \mathbf{X}) - (\mathbf{F}, \mathbf{X}) \}, \quad (11)$$

où \mathbf{U} est la fonctionnelle convexe telle que $\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \partial_X \mathbf{U}(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ [9]. Dans l'équation (11), on minimise une fonctionnelle strictement convexe, le problème (9) admet donc une solution unique qu'on détermine par la méthode de Gauss-Seidel non linéaire [10]. La convergence pour un tel problème est garantie et les performances sont améliorées par relaxation.

3 Applications

3.1 Champ transversal

Nous avons appliqué notre modèle à l'étude d'un matériau supraconducteur, infiniment long, de section rectangulaire, plongé dans un champ transversal, uniforme et variant sinusoidalement en fonction du temps. Les symétries du problème font qu'un quart du dispositif est modélisé (Fig. 2).

À partir des valeurs numériques obtenues pour e et j et de la formule :

$$p = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} \, d\tau \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{T} \int_T p \, dt,$$

on peut calculer directement les pertes instantanées p et moyennes P (Fig. 3) sans utiliser la notion d'aimantation équivalente globale du ruban supraconducteur [11] classiquement utilisé en ingénierie. Cette aimantation peut être, par ailleurs, déterminée par le calcul à partir de la formule suivante [12] :

$$M = \frac{1}{2V} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} \, d\tau.$$

On constate que les pertes évoluent avec une forte oscillation de pulsation 2ω et qu'elles démarrent par un régime transitoire numérique qui peut correspondre à un transitoire d'origine physique : le temps nécessaire pour que les

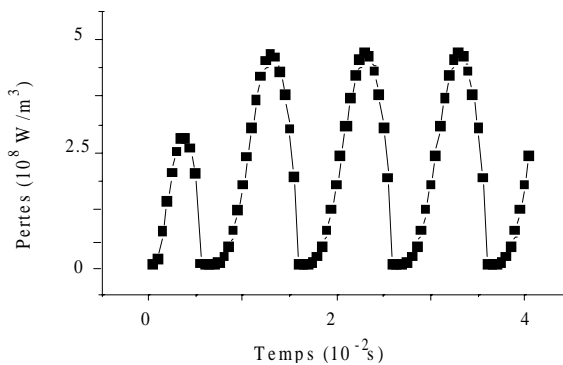
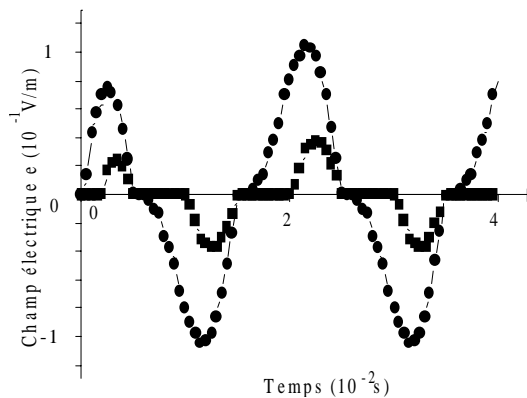
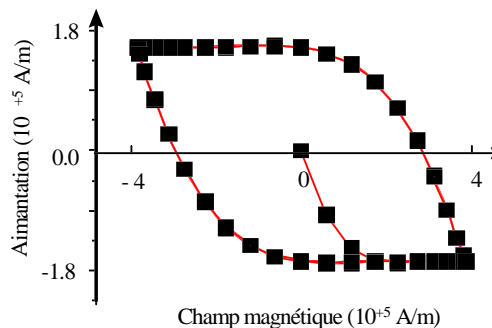


Fig. 3. Pertes Joule instantanées dans le matériau.
[Instantaneous Joule losses.]



(a)



(b)

Fig. 4. (a) Champ électrique aux points C et D. (b) Cycle d'hystérésis.

[(a) Electric field at pints C and D. (b) Hysteresis cycle.]

champs se stabilisent en présence de matériau supraconducteur. Sur la figure 4, on a présenté le cycle d'hystérésis et l'évolution temporelle du champ électrique aux points C et D indiqués sur la figure 2. Notons au passage le retard de la réponse du matériau (Fig. 4a) qui est une conséquence directe du fait que l'on a un problème non linéaire. Nous pouvons constater à partir du cycle d'hystérésis, que

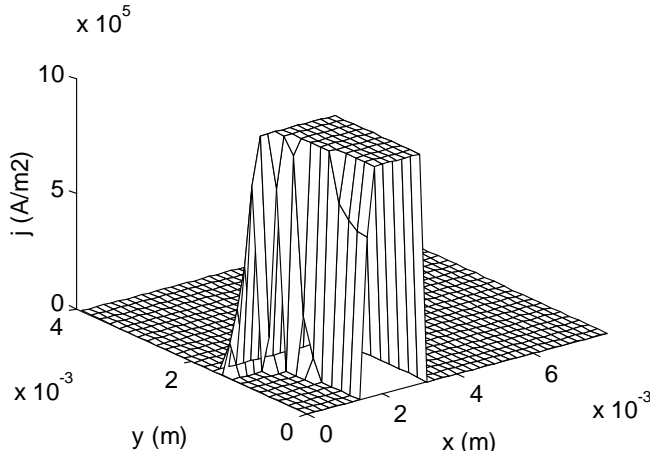


Fig. 5. Distribution du courant dans le ruban.
[Current distribution in the tape.]

le matériau réagit de manière à exclure le champ magnétique (Fig. 4b). Nous pouvons remarquer que nous avons traité un problème à frontière libre sans se soucier du suivi de celle-ci. L'existence de cette frontière est mise en évidence sur la figure 5 sur laquelle on a présenté la distribution de la densité de courant.

3.2 Courant de transport

On fait circuler dans le supraconducteur un courant $I(t)$ variant sinusoïdalement en temps. À une distance suffisamment grande, le système se comporte comme si tout le courant était concentré au centre du matériau supraconducteur. La condition aux limites sur le champ magnétique à la frontière peut alors être approximée par la formule suivante :

$$\mathbf{B}(t,r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta,$$

où r désigne, en coordonnées cylindriques, la distance à l'origine du point où l'on calcule l'induction magnétique et \mathbf{u}_θ le vecteur unitaire orthoradial. On a présenté, sur la figure 6, l'évolution des pertes en fonction de l'amplitude de courant traversant le supraconducteur. Par l'utilisation d'une échelle logarithmique, on constate, que les pertes sont proportionnelles à la puissance cubique de l'amplitude du courant de transport avant qu'elle n'atteigne la valeur de saturation I_c ($j_c S$ où S désigne la surface du ruban) qui est égale ici à 16×10^2 A. Cette loi de variation est conforme à celle que l'on doit obtenir dans le cadre du modèle de Bean.

On remarque également qu'après cette amplitude caractéristique, les pertes tendent à évoluer proportionnellement au carré des amplitudes, ceci étant conforme aux prévisions. En effet, notre modèle prévoit la transition à l'état normal lorsque la densité de courant, à l'intérieur, dépasse la valeur critique j_c qui est égale, dans cette expérience numérique, à 10^8 A/m².

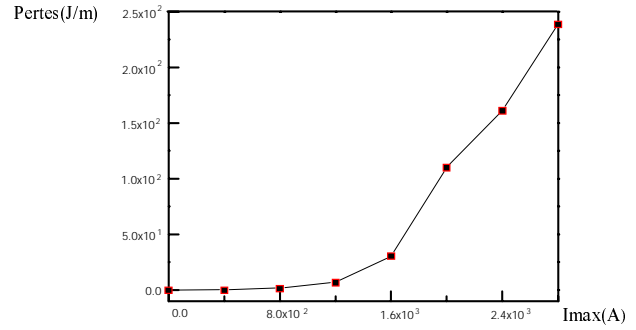


Fig. 6. Pertes dans le matériau supraconducteur en fonction de l'amplitude du courant.

[Superconductor losses versus the current modulus.]

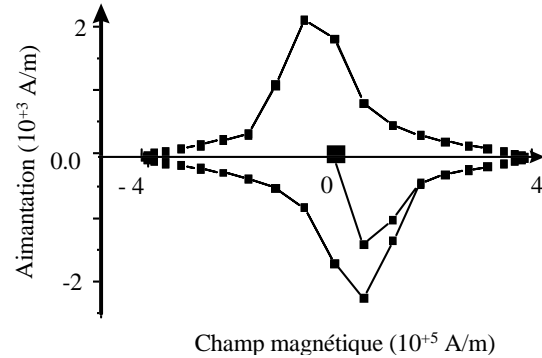


Fig. 7. Cycle d'hystérésis (Kim).

[Hysteresis cycle.]

3.3 Loi de Kim

Nous avons jusqu'ici travaillé avec le modèle de Bean. Ce modèle suppose que la densité de courant critique est constante. Dans la pratique, la densité de courant j_c décroît de façon monotone en fonction du module de l'induction magnétique. Cette dépendance peut être intégrée dans le modèle de Kim suivant :

$$j_c(\mathbf{B}) = \frac{j_c(\mathbf{0})}{\frac{|\mathbf{B}|}{B_0} + 1}.$$

On a testé notre programme, en modélisant un quart de la section, prolongé par l'air, de matériau supraconducteur sous l'hypothèse que ce dernier est plongé dans une région où règne un champ magnétique uniforme, sinusoïdal en temps et transversal. Pour illustrer la différence entre les résultats issus du modèle Bean et ceux issus du modèle de Kim, un exemple de cycle d'hystérésis déduit du modèle de Bean-Kim est présenté sur la figure 7.

Ce cycle présente une "bosse" à bas champ qui n'existe pas dans le cycle de Bean (Fig. 4b) et qui est constatée expérimentalement sur les supraconducteurs à haute température critique (HTC) [13]. Une prise en compte d'une loi $j_c(\mathbf{B})$ s'avère donc nécessaire pour représenter correctement le comportement électromagnétique des HTC. Remarquons que les paramètres physiques $j_c(\mathbf{0})$ et B_0 que

nous avons choisi dans cette simulation conduisent à une variation de j_c de l'ordre de 80 %. Expérimentalement cette variation est plutôt de l'ordre de 30 à 50 %. Il convient donc de se pencher vers l'un ou l'autre des deux modèles présentés ici (Bean ou Kim) en fonction du matériau supraconducteur utilisé et en fonction de l'application envisagée. Autrement dit, on choisit le modèle de Bean dans le cas où la variation de j_c est relativement faible et celui de Kim dans le cas contraire. En effet, on a constaté sur l'exemple traité que les temps de calcul sont dix fois plus élevés pour le modèle de Kim que pour le modèle de Bean.

4 Conclusion

Nous avons développé un modèle numérique intégrant la loi de comportement d'un matériau supraconducteur et présenté une modélisation de cette loi qui s'appuie sur une généralisation du modèle de l'état critique (Fig. 1c). Ceci nous a conduit à résoudre un problème mathématique bien posé et fortement non linéaire qui est de type Stefan ou diffusion non linéaire, la méthode de résolution étant celle de Gauss-Seidel non linéaire. Nous pouvons ainsi déterminer les pertes hystérétiques dans un matériau massif supraconducteur à partir de grandeurs locales sans considérations particulières sur la géométrie du système et sur la forme du champ exciteur. Un des intérêts de la méthode présentée est de permettre la prédiction de la densité de courant j_c , un paramètre important dans la recherche de nouveaux matériaux supraconducteurs, par la résolution d'un problème inverse [14]. Ce modèle a permis l'étude des pertes dans un matériau supraconducteur soumis à un champ externe alternatif. Nous avons également étudié

l'évolution de ces pertes lorsque le matériau supraconducteur est parcouru par un courant alternatif. Enfin, nous avons étendu la méthode aux modèles tenant compte de la dépendance de j_c vis-à-vis du champ magnétique local. Ce modèle devrait permettre d'étudier maintenant les performances de systèmes électrotechniques utilisant des matériaux supraconducteurs.

Bibliographie

1. C. Levillain, Note EDF HM 65/2859 (2 juin 1992).
2. C.P. Bean, Rev. Modern Phys. **36** (1964).
3. C.P. Bean, Phys. Rev. Lett. **8** (1962).
4. Y.B. Kim, C.F. Hempstead, A.R. Strnad, Phys. Rev. Lett. **9** (1962).
5. A. Bossavit, IEEE Trans. Magn. **30**, 3363 (1992).
6. H. Hashizume, T. sugiura, K. Miya, S. Toda, IEEE Trans. Magn. **28** (1992).
7. Y. Yoshida, M. Uesaka, K. Miya, Int. J. Appl. Electromagn. Mater. **5** (1994).
8. G.E. Forsythe, R. Wasow, *Finite difference methods for partial differential equations* (Wiley, New York, 1960).
9. A. Bossavit, J. Phys. III France **3**, 373-396 (1993).
10. P. Faure, *Analyse, Optimisation et Filtrage numériques* (École polytechnique, Édition 1989-1990).
11. C. Levillain, P. Manuel, P.G. Thérond, IEEE Trans. ASC-5 **2** (1995).
12. E. Durand, *Electrostatique et Magnéto-statique* (Masson, 1953).
13. K. Kishio, Y. Nakayama, N. Motohira, T. Noda, T. Kobayashi, K. Kitazawa, K. Yamafuji, I. Tanaka, H. Kojima, Supercond. Sci. Technol. S69 **5** (1992).
14. J.R. Cave, P.R. Critchlow, IEEE Trans. Magn. **27** (1991).